ANALYYSIN TEORIA A JA B

Kaikkia lauseita ei ole muotoiltu samalla tavalla kuin luennoilla. Ilmoita virheistä yms osoitteeseen mikko.kangasmaki@uta.fi (jos et ole varma, onko kyseessä virhe, niin ilmoita mieluummin).

1. Yleistä, luvut

Merkinnällä $A \subset B$ tarkoitetaan, että A on B:n aito tai epäaito osajoukko. Siis $A \subset B$ *ei sulje* pois mahdollisuutta, että $A = B$.

1.1. **Luonnolliset luvut** $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$**.** Luonnollisten lukujen joukossa on määritelty yhteen- ja vähennyslasku.

Peanon aksioomat

P0 On olemassa luonnollinen luku $1 \in \mathbb{N}$.
P1 Jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on olemassa *seuraaja,* $n + 1 \in \mathbb{N}$.
P2 Luku 1 ei ole minkään luonnollisen luvun seuraaja
P3 Jos luvuille $n, k \in \mathbb{N}$ on $n + 1 = k + 1$, niin $n = k$.
P4 Jos $A \subset \mathbb{N}$ siten, että $1 \in A$ ja $n \in A \Longrightarrow n + 1 \in A$, niin $A = \mathbb{N}$.

P4 on induktioaksiooma, joka takaa induktiotodistuksen pätevyyden.

Esimerkki 1.1.1 (Bernoullin epäyhtälö)**.** Jos $x \in \mathbb{R} : x \geqq -1$ ja $n \in \mathbb{N}$, niin $(1 + x)^n \geqq 1 + nx$.

1.2. **Kokonaisluvut** $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$**.** Kokonaislukujen joukossa jokaisella luvulla n on yhteenlaskun vasta-alkio, $-n$.

1.3. **Rationaaliluvut** $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$**.** Rationaalilukujen joukossa jokaisella $q \neq 0$ on kertolaskun käänteisalkio q^{-1}. Rationaaliluvut muodostavat järjestetyn kunnan, eli täyttävät reaalilukujen yhteydessä esitettävät kunta- ja järjestysaksioomat (A0-9 ja B1-4).

Esimerkki 1.3.1. On janoja, joiden pituudet eivät ole rationaalisia, esimerkiksi neliön, jonka sivujen pituus on 1 lävistäjä on $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

2. Reaaliluvut $\mathbb{R}$

Reaalilukujen joukko on Dedekind-täydellinen järjestetty kunta, eli se täyttää

A. Kunta-aksioomat,
B. Järjestysaksioomat, ja
C. Täydellisyysaksiooman.

Se, että $\mathbb{R}$ täyttää nämä aksioomat *ei ole* teoreema, vaan reaalilukujen määritelmä.

2.1. **Kunta-aksioomat.**

A0. $\mathbb{R}$:ssä on kaksi laskutoimitusta, yhteen- ja kertolasku (merkitään $x + y$ ja $x \cdot y$ tai xy), $x + y \in \mathbb{R}$ ja $xy \in \mathbb{R}$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$.
A1. $x + y = y + x$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$. (Yhteenlaskun vaihdantalaki)
A2. $x + (y + z) = (x + y) + z$ kaikilla $x, y, z \in \mathbb{R}$. (Yhteenlaskun liitäntälaki)
A3. $\mathbb{R}$:ssä on yhteenlaskun neutraalialkio, eli $e \in \mathbb{R}$ siten, että $e + x = x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Lause 2.1.1. Yhteenlaskun neutraalialkio on yksikäsitteinen.

Kutsutaan yhteenlaskun neutraalialkiota "nollaksi”, ja merkitään sitä 0.

A4. Jokaisella $x \in \mathbb{R}$ on olemassa yhteenlaskun vasta-alkio, eli $y \in \mathbb{R}$ siten, että $x + y = 0$.

Lause 2.1.2. Kullakin $x \in \mathbb{R}$ on vain yksi yhteenlaskun vasta-alkio.

Luvun $x \in \mathbb{R}$ vasta-alkiota merkitään $-x$.

A5. $xy = yx$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$. (Kertolaskun vaihdannaisuus)

A6. $x(yz) = (xy)z$ kaikilla $x, y, z \in \mathbb{R}$. (Kertolaskun liitännäisyys)

A7. On olemassa kertolaskun neutraalialkio $e \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ siten, että $ex = x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Huomautus: A7:ssa osa $e \neq 0$ on osa määritelmää. Se takaa, että $\mathbb{R} \neq \{0\}$.

Lause 2.1.3. Kertolaskun neutraalialkio on yksikäsitteinen.

Annetaan kertolaskun neutraalialkiolle nimi "yksi"ja merkki 1.

A8. Jokaisella $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ on kertolaskun käänteisalkio, eli luku $y \in \mathbb{R}$ siten, että $xy = 1$.

Lause 2.1.4. Kullakin $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ on vain yksi kertolaskun käänteisalkio.

Annetaan x:n kertolaskun käänteislkiolle merkki x^{-1}.

A9. $x(y + z) = xy + xz$ kaikilla $x, y, z \in \mathbb{R}$. (osittelulaki)

Huom: Kunta-aksioomat A2 ja A6 oikeuttavat merkinnät $x + y + z$ ja $x \cdot y \cdot z$.

Lause 2.1.5. Jos $x + y = x + z$, niin $y = z$.

Lause 2.1.6. Yhtälöllä $a + x = b$, missä x on muuttuja, on yksikäsitteinen ratkaisu $x = b - a$.

Lause 2.1.7. $x \cdot 0 = 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Lause 2.1.8. Jos $xy = 0$, niin $x = 0$ tai $y = 0$.

Lause 2.1.9. Jos $xy = xz$ ja $x \neq 0$, niin $y = z$.

Lause 2.1.10. Yhtälöllä $ax = b$ on yksikäsitteinen ratkaisu $x = a^{-1}b$, kun $a \neq 0$.

Lemma 2.1.11. a) $(-x)y = -(xy)$
b) $(-x)(-y) = xy$
c) $-(-x) = x$
d) $(x^{-1})^{-1} = x$

2.2. Järjestysaksioomat.

B1. $\mathbb{R}$:ssä on määritelty relaatio $<$, eli "pienempi kuin"siten, että kaikille $x, y \in \mathbb{R}$ *tasan* yksi seuraavista pitää paikkansa:

$$x < y, \quad x = y \text{ tai } y < x.$$

B2. Jos $x < y$ ja $y < z$, niin $x < z$. (Transitiivisuus)

B3. Jos $x < y$, niin kaikille $z \in \mathbb{R}$ on $x + z < y + z$.

B4. Jos $0 < x$ ja $0 < y$, niin $0 < xy$.

Merkitään:

$$x > y :\Longleftrightarrow y < x$$
$$x \leqq y :\Longleftrightarrow x < y \text{ tai } x = y$$
$$x \geqq y :\Longleftrightarrow x > y \text{ tai } x = y.$$

Lause 2.2.1. Jos $x \leqq y$ ja $y \leqq x$, niin $x = y$.

Lause 2.2.2. a) Jos $x > 0$, niin $-x < 0$.
b) Jos $x \neq 0$, niin $x \cdot x > 0$.
c) $1 > 0$.

Huom: Aksiooma B2 oikeuttaa merkinnän $x < y < z$.

Lause 2.2.3. a) Jos $x > 0$ ja $y < 0$, niin $xy < 0$
b) Jos $x < 0$ ja $y < 0$, niin $xy > 0$
c) Jos $x > 0$, niin $x^{-1} > 0$. Jos $x < 0$, niin $x^{-1} < 0$.
d) Jos $x < y$ ja $z > 0$, niin $zx < zy$
e) Jos $x < y$ ja $z < 0$, niin $zx > zy$.

Seuraus 2.2.4. a) $x < y \Leftrightarrow zx < zy$, kun $z > 0$
b) $x < y \Leftrightarrow zx > zy$, kun $z < 0$.

Lemma 2.2.5. a) Jos $x, y > 0$, niin $x > y \Leftrightarrow x^2 > y^2$.
b) $x < y$ ja $z < u \Rightarrow x + z < y + u$.

2.3. **$\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ ja $\mathbb{Q}$ reaalilukujen osajoukkona.** Luonnolliset luvut voidaan upottaa $\mathbb{R}$:ään kuvauksella $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, jolle

$$f(1_{\mathbb{N}}) := 1_{\mathbb{R}}\,, \text{ja}$$
$$f(n_{\mathbb{N}} + 1_{\mathbb{N}}) := f(n_{\mathbb{N}}) + 1_{\mathbb{R}}.$$

Lause 2.3.1. Edellämainittu f on laskutoimitukset ja järjestyksen säilyttävä injektio.

Huom: Esimerkiksi

$$4_{\mathbb{R}} \cdot x = (1_{\mathbb{R}} + 1_{\mathbb{R}} + 1_{\mathbb{R}} + 1_{\mathbb{R}})x = 1_{\mathbb{R}} \cdot x + 1_{\mathbb{R}} \cdot x + 1_{\mathbb{R}} \cdot x + 1_{\mathbb{R}} \cdot x = x + x + x + x,$$

joten luonnollisen luvun ja reaaliluvun tulo voidaan tulkita *sekä* monikerraksi, että aksiooman A0 mielessä pelkkänä tulona.

Kokonaisluvut upotetaan $\mathbb{R}$:ään funktiolla $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, jolle

$$\begin{aligned} g(m_{\mathbb{Z}}) &:= f(m_{\mathbb{N}}), && \text{kun } m > 0, \\ g(0_{\mathbb{Z}}) &:= 0_{\mathbb{R}}, && \text{ja} \\ g(m_{\mathbb{Z}}) &:= -g(-m_{\mathbb{Z}}), && \text{kun } m < 0. \end{aligned}$$

Lause 2.3.2. Edellämainittu g on laskutoimitukset ja järjestyksen säilyttävä injektio.

Rationaaliluvut upotetaan $\mathbb{R}$:ään kuvauksella $h : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, jolle

$$h(\frac{m}{n}) := \frac{g(m)}{f(n)}, \text{ kun } m \in \mathbb{Z} \text{ ja } n \in \mathbb{N}.$$

Lause 2.3.3. Edellämianittu h on laskutoimitukset ja järjestyksen säilyttävä injektio.

Huom: Merkitään

$$x^1 := x \qquad \text{ja } x^{n+1} := x^n \cdot x, \qquad \text{kun } n \in \mathbb{N}$$

ja

$$x^0 = 1, \text{ kun } x \neq 0, \text{ ja}$$
$$x^n := \frac{1}{x^n}, \text{ kun } n \in \mathbb{Z}_-.$$

Lause

a) $(x^m)^n = x^{(mn)}$
b) $x^{(m+n)} = x^m x^n$

silloin, kun kaikki potenssit on määritelty.

2.4. **Supremum, infimum ja täydellisyysaksiooma.**

Määritelmä 2.4.1. a) Luku $G \in \mathbb{R}$ on joukon $A \subset \mathbb{R}$ *yläraja,* jos $x \leqq G$ kaikilla $x \in A$.

b) Luku $M \in \mathbb{R}$ on joukon A *pienin yläraja,* eli *supremum,* jos $M \leqq G$ kaikille joukon A ylärajoille G, merkitään $M = \sup A$.
c) Joukko $A \subset \mathbb{R}$ on *ylhäältä rajoitettu,* jos sillä on yläraja.

C Täydellisyysaksiooma. Jokaisella ylhäältä rajoitetulla joukolla $A \subset \mathbb{R}$ on pienin yläraja, $\sup A \in \mathbb{R}$.

Esimerkki 2.4.2. Joukolla $\{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\}$ ei ole supremumia $\mathbb{Q}$:ssa.

Esimerkki 2.4.3. On olemassa $x \in \mathbb{R}$ siten, että $x^2 = 2$.

Esimerkki 2.4.4. Joukon

$$\{\frac{2x-1}{x+1} : x \in \mathbb{R}_+\}$$

supremum on 2.

Lause 2.4.5. Luku $M \in \mathbb{R}$ on joukon $A \subset \mathbb{R}$ supremum jos, ja vain jos

a) $x \leqq M$ kaikilla $x \in A$ ja
b) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists y \in A : M - \varepsilon < y$.

Lause 2.4.6. Ylhäältä rajoitetun joukon supremum on yksikäsitteinen.

Lause 2.4.7. Jos joukossa $A \subset \mathbb{R}$ on suurin luku M, niin $M = \sup A$.

Määritelmä 2.4.8. a) Luku $g \in \mathbb{R}$ on joukon $A \subset \mathbb{R}$ *alaraja,* jos $g \leqq x$ kaikilla $x \in A$.
b) Luku $m \in \mathbb{R}$ on joukon A *suurin alaraja,* eli *infimum,* jos $g \leqq m$ kaikille joukon A alarajoille g, merkitään $M = \inf A$.
c) Joukko $A \subset \mathbb{R}$ on *alhaalta rajoitettu,* jos sillä on alaraja.
d) Joukko $A \subset \mathbb{R}$ on rajoitettu, jos se on sekä ylhäältä, että alhaalta rajoitettu.

Lause 2.4.9. a) Alhaalta rajoitetulla joukolla on infimum
b) Alhaalta rajoitetun joukon infimum on yksikäsitteinen
c) Jos joukossa A on pienin luku m, niin $m = \inf A$.
d) Luku m on joukon A infimum jos, ja vain jos
   1) $m \leqq x$ kaikilla $x \in A$
   2) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists y \in A : y < m + \varepsilon$.

2.5. **Arkhimedeen lause.**

Lause 2.5.1 (Arkhimedeen lause)**.** Kaikille $x \in \mathbb{R}$ on olemassa $n \in \mathbb{N}$ siten, että $n > x$.

Huom: Arkhimedeen lause voidaan muotoilla myös: Kaikille $x, y \in \mathbb{R}_+$ on olemassa $n \in \mathbb{N}$ siten, että $ny > x$. Järjestettyä kuntaa, jossa Arkhimedeen lause on tosi, sanotaan Arkhimedeen kunnaksi. Kaikki järjestetyt kunnat eivät ole Arkhimedeen kuntia.

Lause 2.5.2. Rationaalilukujen joukko on Arkhimedeen kunta.

Lause 2.5.3. Kahden eri reaaliluvun välissä on aina rationaaliluku.

Seuraus 2.5.4. Jokaista reaalilukua voidaan arvioida mielivaltaisella tarkkuudella rationaaliluvuilla, eli $\mathbb{Q}$ on *tiheä* $\mathbb{R}$:ssä.

Seuraus 2.5.5. Kahden eri rationaaliluvun välissä on aina irrationaaliluku.

Seuraus 2.5.6. Mitä tahansa rationaalilukua voidaan arvioida mielivaltaisella tarkkuudella irrationaaliluvuilla.

Seuraus 2.5.7. Kahden eri reaaliluvun välissä on äärettömän monta rationaalilukua ja äärettömän monta irrationaalilukua.

2.6. **Itseisarvo, kolmioepäyhtälö ja topologiaa.**

Määritelmä 2.6.1. Reaaliluvun x *itseisarvo* on

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{kun } x \geqq 0 \\ -x, & \text{kun } x < 0. \end{cases}$$

Huom: $|x|$ on x:n etäisyys 0:sta. $|x-y|$ on x:n etäisyys y:stä.

Lemma 2.6.2. a) $|x| \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$
b) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
c) $|x| = |-x|$
d) $-|x| \leqq x \leqq |x|$
e) $|xy| = |x||y|$
f) $x^2 < y^2 \Leftrightarrow |x| < |y|$

Lause 2.6.3 (Kolmioepäyhtälö, eli Δ-ey.)**.** Kaikille $x, y \in \mathbb{R}$ on

$$||x| - |y|| \leqq |x \pm y| \leqq |x| + |y|.$$

Seuraus 2.6.4.

$$\left| \sum_{k=1}^{n} x_k \right| \leqq \sum_{k=1}^{n} |x_k| \ \ \forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}.$$

Määritelmä 2.6.5. Olkoon $a, b \in \mathbb{R} : a < b$ Tällöin

a) $]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ on *avoin väli,*
b) $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leqq x \leqq b\}$ on *suljettu väli,*
c) $[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a \leqq x < b\}$
ja $]a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqq b\}$ ovat *puoliavoimia välejä,*
d) $[a, \infty[:= \{x \in \mathbb{R} : a \leqq x\}$,
$]a, \infty[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$,
$]-\infty, b[:= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$,
$[-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leqq b\}$ ja
$]-\infty, \infty[:= \mathbb{R}$ ovat *rajoittamattomia välejä.*

Huom: $]-\infty, b[$ *ei ole* erityistapaus välistä $]a, b[$, sillä $\infty \notin \mathbb{R}$.

Määritelmä 2.6.6. Avointa väliä $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ sanotaan pisteen x *ε-ympäristöksi,* ja merkitään $B(x, \varepsilon)$.

Huom: $y \in B(x; \varepsilon) \Leftrightarrow |x - y| < \varepsilon$.

Määritelmä 2.6.7. Joukko $A \subset \mathbb{R}$ on *avoin,* jos jokaisella $x \in A$ on olemassa $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ siten, että $B(x, \varepsilon) \subset A$. Joukko $B \subset \mathbb{R}$ on *suljettu,* jos $\mathbb{R} \setminus B$ on avoin.

Huom: Joukon ei ole pakko olla joko suljettu tai avoin, esimerkiksi $[a, b[$ ei ole kumpaakaan.

Lause 2.6.8. a) $\emptyset$ ja $\mathbb{R}$ ovat sekä suljettuja, että avoimia
b) Avoin väli on avoin joukko
c) Suljettu väli on suljettu joukko
d) Puoliavoin väli ei ole avoin eikä suljettu.

Lause 2.6.9. a) Mikä tahansa avointen joukkojen yhdiste on avoin.
b) Avointen joukkojen äärellinen leikkaus on avoin.

Seuraus 2.6.10. a) Suljettujen joukkojen mikä tahansa leikkaus on suljettu.
b) Suljettujen joukkojen äärellinen yhdiste on suljettu.

Määritelmä 2.6.11. Piste $x \in \mathbb{R}$ on joukon $A \subset \mathbb{R}$ *kasautumispiste,* jos kaikilla $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ joukossa $B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}$ on äärettömän monta joukon A pistettä.

Huom: Seuraavat ovat yhtäpitäviä:
(1) x on joukon A kasautumispiste
(2) kaikilla ε joukossa $[B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}] \cap A$ on äärettömän monta pistettä
(3) kaikilla ε joukossa $[B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}] \cap A$ on äärettömän monta joukon A pistettä (tämä on luennolla esitetty määritelmä)
(4) kaikilla ε joukossa $[B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}]$ on joukon A piste
(5) kaikilla ε on $[B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}] \cap A \neq \emptyset$

Huom: x:n ei tarvitse olla joukon A piste ollakseen sen kasautumispiste.

Lause 2.6.12. Epätyhjä joukko on suljettu jos, ja vain jos se sisältää kaikki kasautumispisteensä.

3. Lukujonon raja-arvo

3.1. Määritelmä ja perusominaisuuksia.

Määritelmä 3.1.1. *Lukujono* on jono reaalilukuja: $x_1, x_2, \ldots$. Sitä merkitään $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, tai $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tai vain lyhyesti (x_n).

Huom: Lukujonoa voidaan ajatella kuvauksena $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Määritelmä 3.1.2. Lukujonon $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *raja-arvo* on $x \in \mathbb{R}$, jos

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} : n > n(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon.$$

Merkitään tällöin $x = \lim_{n \to \infty} x_n$.

Lukujonoa, jolla on raja-arvo sanotaan *suppenevaksi* (eli *konvergoivaksi*). Jos lukujono ei suppene, sitä sanotaan *hajaantuvaksi,* eli *divergoivaksi.*

..

Huom: Merkitään joskus $n(\varepsilon)$:a n_ε.
Huom:

$$\lim_{n\to\infty} x_n \iff \forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+\exists n(\varepsilon)\in\mathbb{N} : x_n \in B(x,\varepsilon),\ \text{kun } n > n(\varepsilon).$$

Lause 3.1.3. Suppenevan lukujonon raja-arvo on yksikäsitteinen.

Lause 3.1.4. $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ jos, ja vain jos $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+$ joukossa $\mathbb{R}\setminus B(x,\varepsilon)$ on enintään äärellinen määrä jonon (x_n) alkioita.

Lause 3.1.5. Suppeneva lukujono on rajoitettu. Toisin sanoen, jos (x_n) suppenee, on olemassa $m, M \in \mathbb{R}$ siten, että $m \leqq x_n \leqq M$ kaikilla $n\in\mathbb{N}$.

Lause 3.1.6. Jos $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ja $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, niin

a) $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$
b) $\lim_{n\to\infty}(ax_n) = ax\ \forall a\in\mathbb{R}$
c) $\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = xy$
d) $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}$, kun $y \neq 0$.

Lemma 3.1.7. a) $\lim_{n\to\infty} x_n = x \iff \lim_{n\to\infty}(x_n - x) = 0$
b) $\lim_{n\to\infty} x_n = x \iff \lim_{n\to\infty} x_{n+k} = x\ \forall k\in\mathbb{N}$
c) $\lim_{n\to\infty} x_n = x \implies \lim_{n\to\infty} |x_n| = |x|$ (*Huomaa: implikaatio, ei ekvivalenssi*)
d) $\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \iff \lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$.

Seuraus 3.1.8. Jos (x_n) suppenee ja (y_n) hajaantuu, niin

a) $(x_n + y_n)$ hajaantuu ja
b) $(x_n y_n)$ hajaantuu, kun $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$.

Huom: $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ *ei riitä* takaamaan, että $(x_n y_n)$ suppenee.

Lause 3.1.9. Jos $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ja $x_n \leqq M \in\mathbb{R}$ kaikilla $n\in\mathbb{N}$, niin $x \leqq M$.

Seuraus 3.1.10. Jos $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ja $x_n \geqq m\in\mathbb{R}$ kaikilla $n\in\mathbb{N}$, niin $x \geqq m$.

Lause 3.1.11. Jos $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = x$ ja $x_n \leqq z_n \leqq y_n$ kaikilla $n > n_0 \in\mathbb{N}$, niin $\lim_{n\to\infty} z_n = x$.

Esimerkki: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$, kun $p\in\mathbb{R}_+$.

Lause 3.1.12. Jos (x_n) suppenee, niin

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+\exists n(\varepsilon)\in\mathbb{N} : n > n(\varepsilon) \implies |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon\ \ \forall p\in\mathbb{N}.$$

Huom: Lause 3.1.12 sanoo, että suppenevat lukujonot ovat Cauchy-jonoja.

Seuraus 3.1.13. Jos (x_n) suppenee, niin

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+\exists n(\varepsilon)\in\mathbb{N} : m, n > n(\varepsilon) \implies |x_m - x_n| < \varepsilon.$$

Huom: Seuraus 3.1.13 on vain toinen muotoilu sille, että suppeneva lukujono on Cauchy-jono.

Seuraus 3.1.14. Jos on olemassa $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$ siten, että kaikille $k\in\mathbb{N}$ on olemassa $m, n > k$ siten, että $|x_m - x_n| \geqq \varepsilon$, niin lukujono (x_n) ei suppene.

Esimerkki 3.1.15. $\lim_{n\to\infty} \alpha^n = 0$, kun $0 < \alpha < 1$.

Esimerkki 3.1.16. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

3.2. Monotoniset jonot.

Määritelmä 3.2.1. Lukujono (x_n) on

a) *nouseva,* jos $x_{n+1} \geqq x_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$
b) *aidosti nouseva,* jos $x_{n+1} > x_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$
c) *laskeva,* jos $x_{n+1} \leqq x_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$
d) *aidosti laskeva,* jos $x_{n+1} < x_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$
e) *monotoninen,* jos se on nouseva tai laskeva
f) *aidosti monotoninen,* jos se on aidosti nouseva tai aidosti laskeva.

Huom: Joskus nousevaa jonoa sanotaan kasvavaksi ja laskevaa pieneneväksi tai väheneväksi.

Lause 3.2.2. Nouseva lukujono suppenee, jos ja vain jos se on ylhäältä rajoitettu.

Seuraus 3.2.3. Laskeva lukujono suppenee jos, ja vain jos se on alhaalta rajoitettu.

Lause 3.2.4. Jos $a_n \leqq b_n$, $\lim_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$, ja $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin leikkauksessa $\cap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$ on tasan yksi piste.

Esimerkki 3.2.5. On olemassa raja-arvo $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$. Tätä raja-arvoa sanotaan Neperin luvuksi, ja merkitään e.

3.3. Cauchyn yleinen suppenemiskriteerio.

Määritelmä 3.3.1. Jono (x_n) on *Cauchy-jono,* jos kaikilla $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ on olemassa $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ siten, että $|x_m - x_n| < \varepsilon$, kun $m, n > n(\varepsilon)$.

Lause 3.3.2. Lukujono suppenee jos, ja vain jos se on Cauchy-jono.

Seuraus 3.3.3. $\mathbb{R}$ on Cauchy-täydellinen.

Huom: Järjestetty kunta (tai yleisemmin metrinen avaruus) on Cauchy-täydellinen, jos sen Cauchy-jonot suppenevat. Täydellisyysaksiooma sanoo, että $\mathbb{R}$ on Dedekind-täydellinen. Järjestetylle kunnalle K pätee:

$$\begin{aligned} K \text{ on Dedekind-täydellinen} &\implies K \text{ on Cauchy-täydellinen} \\ K \text{ on Cauchy-täydellinen} &\not\Longrightarrow K \text{ on Dedekind-täydellinen} \\ K \text{ on Dedekind-täydellinen} &\iff K \text{ on Cauchy-täydellinen ja Arkhimedeen lause on tosi } K\text{:ssa} \end{aligned}$$

3.4. Osajonot ja Bolzano-Weierstrassin lause.

Määritelmä 3.4.1. Olkoon $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ aidosti kasvava jono luonnollisia lukuja (eli $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < \cdots$). Määrittelemällä $y_k := x_{n_k}$ saadaan jonon (x_n) *osajono*

$$(y_k)_{k=1}^{\infty} = (x_{n_k})_{k=1}^{\infty}.$$

Lause 3.4.2. Jos lukujono suppenee, niin myös sen jokainen osajono suppenee samaan raja-arvoon kuin alkuperäinen jono.

Seuraus 3.4.3. Lukujono ei suppene, jos

a) sillä on hajaantuva osajono
b) sillä on kaksi eri raja-arvoihin suppenevaa osajonoa.

Lause 3.4.4 (Bolzano-Weierstrass)**.** Rajoitetulla lukujonolla on suppeneva osajono.

Seuraus. Rajoitetulla reaalilukujoukolla, jossa on äärettömän monta pistettä, on kasautumispiste.

Huom: Luennolla ei esitetty edellistä seurausta, eikä sitä tarvitse tietää kokeessa, todistus on samanlainen kuin Bolzano-Weierstrassin lauseelle.

3.5. Rajatta kasvavat ja vähenevät jonot.

Määritelmä 3.5.1. a) Jono (x_n) *kasvaa rajatta,* jos jokaisella $M \in \mathbb{R}$ on olemassa $n_M \in \mathbb{N}$ siten, että $n > n_M \Longrightarrow x_n > M$, merkitään tällöin $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

b) Jono (x_n) *vähenee rajatta,* jos jokaisella $m \in \mathbb{R}$ on olemassa $n_m \in \mathbb{N}$ siten, että $n > n_m \Longrightarrow x_n < m$, merkitään $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Huom:

(1) $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ *ei ole* erityistapaus tavallisesta raja-arvosta, sillä $\infty \notin \mathbb{R}$.
(2) Merkintä $n \to \infty$ tulisikin lukea mieluummin "kun n kasvaa rajatta" kuin "n:n lähestyessä ääretöntä".
(3) Rajatta kasvava/vähenevä lukujono *ei* suppene, vaan hajaantuu.

Lause 3.5.2. Jos $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \infty$ ja $\lim_{n\to\infty} z_n = z \in \mathbb{R}$, niin

a) $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \infty$
b) $\lim_{n\to\infty}(x_n \pm z_n) = \infty$
c) $\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \infty$
d) $\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{x_n} = 0$.

Huom: Esimerkiksi seuraavien raja-arvoista edellisen lauseen oletuksin ei ole tietoa: $(x_n - y_n)$, $\frac{x_n}{y_n}$ ja $\frac{x_n}{z_n}$.

4. Funktion raja-arvo

4.1. Funktio.

Määritelmä 4.1.1. Jos $f : A \to B$ on funktio, niin

a) A on f:n *määrittely-* eli *lähtöjoukko*
b) B on f:n *maalijoukko*
c) jos $A_1 \subset A$, niin $f(A_1) := \{f(x) : x \in A_1\}$ on joukon A_1 *kuvajoukko*
d) jos $B_1 \subset B$, niin $f^{-1}(B_1) := \{x \in A : f(x) \in B_1\}$ on joukon B_1 *alkukuva*
e) jos $f(A) = B$, niin f on *surjektio*
f) jos $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, niin f on *injektio*
g) f on *bijektio,* jos se on sekä surjektio, että injektio.

Määritelmä 4.1.2. a) Jos $f : A \to B$ on funktio ja $A_1 \subset A$, niin funktio

$$g : A_1 \to B : x \mapsto f(x)$$

on funktion f *rajoittuma* joukkoon A_1, merkitään $g = f_{|A_1}$.

b) Jos $f : A \to B$ ja $g : B \to C$ ovat funktioita, niin $g \circ f : A \to C : x \mapsto g(f(x))$ on g:n ja f:n *yhdistetty kuvaus*

c) Jos $f : A \to B$ on bijektio, vastaa jokaista $y \in B$ yksikäsitteinen $x \in A$ siten, että $f(x) = y$. Tällöin f:n *käänteisfunktio* on

$$f^{-1} : B \to A : y \mapsto x, \text{ kun } f(x) = y.$$

Esimerkki:

(1)

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{kun } x \in A \\ 0 & \text{kun } x \notin A \end{cases}$$

on joukon A *karakteristinen funktio.*

(2) $id : A \to A : x \mapsto x$ on *identtinen kuvaus* joukossa A

4.2. Funktion raja-arvo.

Määritelmä 4.2.1. Joukko $B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}$ on pisteen x *punkteerattu ε-ympäristö,* ja sitä merkitään $B'(x, \varepsilon)$.

Määritelmä 4.2.2. Reaaliluku a on funktion *raja-arvo pisteessä* x_0, jos $f : A \to B$ on määritelty jossain pisteen x_0 punkteeratussa ympäristössä, ja

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}_+ : x \in A \text{ ja } 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Merkitään tällöin $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$.

Huom:

(1) Funktiolla voi olla raja-arvo pisteessä x_0, vaikka se ei olisikaan määritelty siinä pisteessä.
(2) Käytännössä luku todistetaan funktion raja-arvoksi (yleensä) palauttamalla epäyhtälön $|f(x) - a| < \varepsilon$ totuus epäyhtälön $\alpha|x - x_0| < \beta\varepsilon$ totuuteen, jolloin δ_ε:ksi käy $\frac{\beta\varepsilon}{\alpha}$. Tällöin pitää muistaa tarkastella, *millä ehdoilla* alkuperäinen epäyhtälö on tosi (eikä mitä seurauksia sen totuudesta on). Ei kannata kuitenkaan opetella mekaanisia menetelmiä, sillä poikkeuksellisissa tilanteissa niistä ei ole apua.

Lause 4.2.3. Jos funktiolla on raja-arvo, niin se on yksikäsitteinen.

Lause 4.2.4. Seuraavat ovat yhtäpitäviä:

a) $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$
b) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}_+ : x \in B'(x_0, \delta_\varepsilon) \Longrightarrow f(x) \in B(a, \varepsilon)$
c) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}_+ : f(B'(x_0, \delta_\varepsilon)) \subset B(a, \varepsilon)$.

Huom: edellisen lauseen b- ja c-kohta ovat vain toisia muotoiluja raja-arvon määritelmälle.

Lause 4.2.5. Jos raja-arvo $\lim_{x \to x_0} f(x)$ on olemassa, niin on olemassa $\alpha \in \mathbb{R}_+$ siten, että f on rajoitettu joukossa $B'(x_0, \alpha)$.

Lause 4.2.6. Jos $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ ja $\lim_{x \to x_0} g(x) = b$, niin

a) $\lim_{x \to x_0} (f + g)(x) = a + b$
b) $\lim_{x \to x_0} (cf)(x) = ca \ \ \forall c \in \mathbb{R}$
c) $\lim_{x \to x_0} (fg)(x) = ab$
d) $\lim_{x \to x_0} \frac{f}{g}(x) = \frac{a}{b}$, kun $b \neq 0$.

Seuraus 4.2.7. Jos on olemassa raja-arvo $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ ja ei ole olemassa raja-arvoa $\lim_{x \to x_0} g(x)$, niin

a) Ei ole olemassa raja-arvoa $\lim_{x \to x_0} (f + g)(x)$
b) Jos $a \neq 0$ niin ei ole olemassa raja-arvoa $\lim_{x \to x_0} (fg)(x)$

Lause 4.2.8. Jos $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ ja $\lim_{x \to x_0} g(x) = b$ ja on olemassa $\alpha \in \mathbb{R}_+$ siten, että $f(x) \leqq g(x)$ kaikilla $x \in B'(x_0, \alpha)$, niin $a \leqq b$.

Lause 4.2.9. Jos $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = a$, ja on olemassa $\alpha \in \mathbb{R}_+$ siten, että $f(x) \leqq h(x) \leqq g(x)$ kaikilla $x \in B'(x_0, \alpha)$, niin $\lim_{x \to x_0} h(x) = a$.

Lause 4.2.10 (Jonokarakterisaatio)**.** Seuraavat ovat yhtäpitäviä:

a) $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$
b) kaikille jonoille $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, joilla on $x_n \neq x_0 \forall n \in \mathbb{N}$ ja $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ pätee: $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = a$.

Lause 4.2.11 ("Cauchy")**.** Raja-arvo $\lim_{x \to x_0} f(x)$ on olemassa jos, ja vain jos

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}_+ : x, y \in B'(x_0, \delta_\varepsilon) \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Seuraus 4.2.12. Jos on olemassa $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ siten, että kaikille $\delta \in \mathbb{R}_+$ on olemassa $x, y \in B'(x_0, \delta)$, joille $|f(x) - f(y)| \geqq \varepsilon$, niin raja-arvoa $\lim_{x \to x_0} f(x)$ *ei* ole olemassa.

4.3. Yleistyksiä.

Määritelmä 4.3.1. a) Jos f on määritelty joukossa $]x_0-\alpha, x_0[$ jollain $\alpha \in \mathbb{R}_+$, ja

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}_+ : x_0 - \varepsilon < x < x_0 \Longrightarrow |f(x) - a| < \varepsilon,$$

niin a on f:n *vasemmanpuoleinen raja-arvo* pisteessä x_0, merkitään

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = a.$$

b) Jos f on määritelty joukossa $]x_0, x_0+\alpha[$ jollain $\alpha \in \mathbb{R}_+$, ja

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}_+ : x_0 < x < x_0 + \varepsilon \Longrightarrow |f(x) - a| < \varepsilon,$$

niin a on f:n *oikeanpuoleinen raja-arvo* pisteessä x_0, merkitään

$$\lim_{x \to x_0 +} f(x) = a.$$

Lause 4.3.2. $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ jos, ja vain jos $\lim_{x\to x_0 -} f(x) = a$ ja $\lim_{x \to x_0+} f(x) = a$.

Määritelmä 4.3.3. Funktio $f : A \to \mathbb{R}$ on

a) *nouseva,* jos $x < y \Longrightarrow f(x) \leqq f(y)$
b) *aidosti nouseva,* jos $x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$
c) *laskeva,* jos $x > y \Longrightarrow f(x) \geqq f(y)$
d) *aidosti laskeva,* jos $x > y \Longrightarrow f(x) > f(y)$
e) *monotoninen,* jos se on nouseva tai laskeva, ja
f) *aidosti monotoninen,* jos se on aidosti nouseva tai aidosti laskeva.

Lause 4.3.4. Välillä $]a, b[$ määritellyllä nousevalla funktiolla on vasemmanpuoleinen raja-arvo $\lim_{x\to b-} f(x)$ jos, ja vain jos f on ylhäältä rajoitettu.

Määritelmä 4.3.5. a) Funktio f *kasvaa rajatta* x:n lähestyessä x_0:aa, jos

$$\forall M \in \mathbb{R} \;\; \exists \delta_M \in \mathbb{R}_+ : 0 < |x - x_0| < \delta_M \Longrightarrow f(x) > M,$$

merkitään $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

b) Funktio f *vähenee rajatta* x:n lähestyessä x_0:aa, jos

$$\forall m \in \mathbb{R} \;\; \exists \delta_m \in \mathbb{R}_+ : 0 < |x - x_0| < \delta_m \Longrightarrow f(x) < m,$$

merkitään $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

Määritelmä 4.3.6. a) Funktiolla $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on *raja-arvo* a x:n *kasvaessa rajatta,* jos

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : x > n_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - a| < \varepsilon,$$

merkitään $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$.

b) Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *kasvaa rajatta x:n kasvaessa rajatta,* jos

$$\forall M \in \mathbb{R} \;\; \exists n_M \in \mathbb{N} : x > n_M \Longrightarrow f(x) > M,$$

merkitään $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Samaan tapaan määritellään

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = a, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = \infty \text{ ja } \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty.$$

5. Funktion jatkuvuus

5.1. Määritelmä ja perusominaisuuksia.

Määritelmä 5.1.1. Funktio $f : A \to \mathbb{R}$ on *jatkuva* pisteessä $x_0 \in A$, jos se on määritelty jossain x_0:n ympäristössä, ja kaikille $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ on olemassa $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ siten, että $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ aina, kun $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$.

Lause 5.1.2. Seuraavat ovat yhtäpitäviä:

(1) $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
(2) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}_+ : |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ (eli f on jatkuva)

(3) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}_+ : |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon)$
(4) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}_+ : x \in B(x_0, \delta_\varepsilon) \Longrightarrow f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon)$
(5) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}_+ : f\left(B'(x_0, \delta_\varepsilon)\right) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$.

Huom: Kohdat 1-5 ovat vain erilaisia muotoiluja jatkuvuuden määritelmälle.

Lause 5.1.3. Jos funktiot f ja g ovat jatkuvia pisteessä x_0, niin

a) $(f + g)$ on jatkuva pisteessä x_0
b) (cf) on jatkuva pisteessä x_0 kaikilla vakioilla $c \in \mathbb{R}_+$
c) (fg) on jatkuva pisteessä x_0
d) $(\frac{f}{g})$ on jatkuva pisteessä x_0, jos $g(x_0) \neq 0$.

Seuraus 5.1.4. Jos f on jatkuva ja g epäjatkuva x_0:ssa, niin $(f + g)$ on epäjatkuva x_0:ssa. Jos lisäksi $f(x_0) \neq 0$, niin (fg) on epäjatkuva x_0:ssa.

Lause 5.1.5. Jos f on jatkuva x_0:ssa ja $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$, niin $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$.

Lause 5.1.6. Jos $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, ja g on jatkuva pisteessä a, niin $\lim_{x\to x_0} (g \circ f)(x) = g(a)$.

Lause 5.1.7. Jos f on jatkuva x_0:ssa ja g on jatkuva $f(x_0)$:ssa, niin $(g \circ f)$ on jatkuva x_0:ssa.

Määritelmä 5.1.8. Jos A on avoin, niin funktio $f : A \to \mathbb{R}$ on *jatkuva joukossa* A, jos f on jatkuva jokaisessa pisteessä $x \in A$.

Lause 5.1.9. Jos A on avoin, niin $f : A \to \mathbb{R}$ on jatkuva jos, ja vain jos jokaisen avoimen joukon $B \subset \mathbb{R}$ alkukuva $f^{-1}(B)$ on avoin.

Määritelmä 5.1.10. a) Funktio f on *vasemmalta jatkuva* pisteessä x_0, jos $\lim_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0)$
b) Funktio f on *oikealta jatkuva* pisteessä x_0, jos $\lim_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0)$.

Lause 5.1.11. Funktio on jatkuva pisteessä x_0, jos ja vain jos se on sekä vasemmalta, että oikealta jatkuva pisteessä x_0.

Määritelmä 5.1.12. Funktio on jatkuva suljetulla (ja rajoitetulla) välillä $[a, b]$, jos se on jatkuva joukossa $]a, b[$, vasemmalta jatkuva pisteessä b ja oikealta jatkuva pisteessä a.

5.2. **Bolzanon lause ja jatkuvien funktioiden väliarvolause.**

Lemma 5.2.1. Jos f on vasemmalta jatkuva pisteessä x_0, ja $f(x_0) > 0$, niin on olemassa $\alpha \in \mathbb{R}_+$ siten, että $f(x) > 0$ kaikille $x \in \,]x_0 - \alpha, x_0]$.

Seuraus 5.2.2. Jos f on oikealta jatkuva pisteessä x_0, ja $f(x_0) > 0$, niin on olemassa $\alpha \in \mathbb{R}_+$ siten, että $f(x) > 0$ kaikille $x \in [x_0, x_0 + \alpha[$. Jos f on jatkuva pisteessä x_0 ja $f(x_0) > 0$, niin on olemassa $\beta \in \mathbb{R}_+$ siten, että $f(x) > 0$ kaikille $x \in B(x_0, \beta)$.

Lause 5.2.3 (Bolzano)**.** Jos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva, $f(a) < 0$ ja $f(b) > 0$, niin on olemassa $c \in \,]a, b[$ siten, että $f(c) = 0$.

Seuraus 5.2.4. Jos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva, $f(a) > 0$ ja $f(b) < 0$, niin on olemassa $c \in \,]a, b[$ siten, että $f(c) = 0$.

Seuraus 5.2.5 (Jatkuvien funktioiden väliarvolause, eli JFVAL)**.** Jos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja $f(a) < y < f(b)$, niin on olemassa $c \in \,]a, b[$ siten, että $f(c) = y$.

Lause 5.2.6. Jos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva joukossa $[a, b]$, niin se on rajoitettu.

Lause 5.2.7. Jos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva joukossa $[a, b]$, se saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa, sekä kaikki niiden välissä olevat arvot.

5.3. Funktioita ja käänteisfunktioita.

Lause 5.3.1. Jos I on avoin väli (myös $]a,\infty[$, $]-\infty,b[$ ja $]-\infty,\infty[$), ja $f : I \to f(I)$ on jatkuva ja aidosti nouseva, niin f:llä on käänteisfunktio, joka on myös jatkuva.

Lause 5.3.2. Polynomit ovat jatkuvia.

Lause 5.3.3. Rationaalifunktiot $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (P ja Q ovat polynomeja) ovat jatkuvia niissä pisteissä, joissa $Q(x) \neq 0$ (eli koko määrittelyjoukossaan).

Lause 5.3.4. Funktio $\sqrt[n]{x}$ on jatkuva määrittelyjoukossaan, kun $n \in \mathbb{N}$.

Lause 5.3.5. Järjestetyssä kunnassa K seuraavat ovat yhtäpitäviä:

(1) K on Dedekind-täydellinen
(2) Arkhimedeen lause on tosi K:ssa ja K on Cauchy-täydellinen
(3) nousevalla rajoitetulla jonolla on raja-arvo
(4) sisäkkäisten suljettujen välien leikkaus on epätyhjä
(5) Bolzanon lause on tosi K:ssa
(6) JFVAL on tosi K:ssa
(7) Bolzano-Weierstrassin lause on tosi K:ssa
(8) (Heine-Borelin lause on tosi K:ssa (ei sisälly kurssiin))
(9) suljetulla K:n välillä jatkuva funktio saavuttaa maksiminsa
(10) äärettömällä rajoitetulla joukolla on kasautumispiste

(Luennolla on todistettu vain, että kohta 1 implikoi loput (eli toisinsanoen reaaliluvuille, joilla Dedekind-täydellisyys on aksiooma pätee myös kohdat 2-10)).

6. Differentiaalilaskentaa

6.1. Derivaatta.

Määritelmä 6.1.1. Jos funktio on määritelty jossain pisteen x_0 ympäristössä ja raja-arvo

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = a$$

on olemassa, niin a on f:n *derivaatta* pisteessä x_0, merkitään $a =: f'(x_0)$.

Huom. Jatkossa ei aina erikseen sanota, että funktion tulee olla määritelty jossain pisteen ympäristössä ollakseen derivoituva siinä.

Lause 6.1.2. Luku $a \in \mathbb{R}$ on funktion $f : A \to \mathbb{R}$ derivaatta pisteessä $x \in A$, jos ja vain jos jossain x:n ympäristössä on

$$f(x+h) - f(x) = a \cdot h + h \cdot g(h),$$

missä g on funktio, jolle $g(0) = \lim_{h\to 0} g(h) = 0$.

Lause 6.1.3. Jos $f : A \to \mathbb{R}$ on derivoituva pisteessä $x_0 \in A$, niin se on myös jatkuva pisteessä x_0.

Lause 6.1.4. Jos f:llä ja g:llä on derivaatta pisteessä x_0, niin

a) $(cf)'(x_0) = cf'(x_0) \ \forall c \in \mathbb{R}$
b) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
c) $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
d)
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}, \text{ kun } g(x_0) \neq 0$$
e)
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2},$$
kun $g(x_0) \neq 0$.

Lause 6.1.5. Jos $f : A \to \mathbb{R}$ on bijektio, sillä on derivaatta pisteessä $x_0 \in A$, $f'(x_0) \neq 0$, ja käänteiskuvaus f^{-1} on määritelty jossain pisteen $y_0 := f(x_0)$ ympäristössä, niin f^{-1}:llä on derivaatta pisteessä y_0 ja

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Lause 6.1.6. Jos f on derivoituva pisteessä x_0 ja g on derivoituva pisteessä $f(x_0)$, niin yhdistetty kuvaus $g \circ f$ on derivoituva pisteessä x_0 ja

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0)g'(f(x_0)).$$

Huom. Ylläolevassa merkintä $(g \circ f)'(x_0)$ tarkoittaa yhdistetyn funktion derivaattaa pisteessä x_0. Oikeanpuoleinen merkintä $g'(f(x_0))$ tarkoittaa funktion g derivaattaa pisteessä $f(x_0)$.

6.2. **Derivaatan käsitteen yleistyksiä.**

Määritelmä 6.2.1. a) Luku $a \in \mathbb{R}$ on funktion f *oikeanpuoleinen derivaatta* pisteessä x_0, jos f on määritelty joukossa $[x_0, x_0 + \alpha[$ jollakin $\alpha \in \mathbb{R}_+$, ja

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a,$$

merkitään tällöin $a = f'(x_0+)$.

b) Luku $b \in \mathbb{R}$ on funktion f *vasemmanpuoleinen derivaatta* pisteessä x_0, jos f on määritelty joukossa $]x_0 - \alpha, x_0[$ jollakin $\alpha \in \mathbb{R}_+$, ja

$$\lim_{h \to 0-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = b,$$

merkitään tällöin $b = f'(x_0+)$.

Lause 6.2.2.

$$f'(x_0) = a \iff f'(x_0+) = a \text{ ja } f'(x_0-) = a.$$

Määritelmä 6.2.3. a) Funktio on *derivoituva avoimessa joukossa* A, jos se on derivoituva jokaisessa A:n pisteessä

b) Funktio f on *jatkuvasti derivoituva* joukossa A, jos se on derivoituva joukossa A ja funktio $A \to \mathbb{R} : x \mapsto f'(x)$ on jatkuva A:ssa

c) Jos f on derivoituva joukossa A ja $f' : A \to \mathbb{R} : x \mapsto f'(x)$ on derivoituva pisteessä $x_0 \in A$, niin $(f')'(x_0) =: f''(x_0)$ on f:n *toinen derivaatta* pisteessä x_0.

Huom. Vastaavalla tavalla määritellään kolmas jne. derivaatta.

6.3. **Rollen lause, Differentiaalilaskennan väliarvolause ja hieman ääriarvoista.**

Lause 6.3.1. a) Jos $f'(x_0) > 0$, niin on olemassa $\alpha \in \mathbb{R}_+$ siten, että $x_0 - \alpha < x < x_0 \Longrightarrow f(x) < f(x_0)$ ja $x_0 < x < x_0 + \alpha \Longrightarrow f(x_0) < f(x)$

b) Jos $f'(x_0) < 0$, niin on olemassa $\beta \in \mathbb{R}_+$ siten, että $x_0 - \beta < x < x_0 \Longrightarrow f(x) > f(x_0)$ ja $x_0 < x < x_0 + \beta \Longrightarrow f(x_0) > f(x)$.

Lause 6.3.2. Jos funktiolla f on maksimi pisteessä x_0 ja f on derivoituva x_0:ssa, niin $f'(x_0) = 0$.

Lause 6.3.3 (Rolle)**.** Jos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva joukossa $[a, b]$, derivoituva joukossa $]a, b[$ ja $f(a) = f(b)$, niin on olemassa $c \in]a, b[$ siten, että $f'(c) = 0$.

Lause 6.3.4 (Differentiaalilaskennan väliarvolause, eli DVAL)**.** Jos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva välillä $[a, b]$ ja derivoituva välillä $]a, b[$, niin on olemassa $c \in]a, b[$ siten, että

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Lause 6.3.5 (Integraalilaskennan peruslause, eli IPL)**.** Jos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva välillä $[a, b]$ ja derivoituva välillä $]a, b[$ siten, että $f'(x) = 0$ kaikilla $x \in]a, b[$, niin f on vakiofunktio.

Seuraus 6.3.6. Jos f on jatkuva välillä $[a, b]$ ja derivoituva välillä $]a, b[$ siten, että $f'(x) \leqq M$ kaikilla $x \in]a, b[$, niin $f(x) \leqq f(a) + M(x - a)$ kaikilla $x \in]a, b[$.

Seuraus 6.3.7. Jos $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva välillä $[a,b]$ ja derivoituva välillä $]a,b[$ siten, että $f'(x) \geqq 0$ kaikilla $x \in]a,b[$, niin f on nouseva välillä $[a,b]$.

Seuraus 6.3.8. Jos $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva välillä $[a,b]$ ja derivoituva välillä $]a,b[$ siten, että $f'(x) \leqq 0$ kaikilla $x \in]a,b[$, niin f on laskeva välillä $[a,b]$.

Määritelmä 6.3.9.
a) Funktiolla $f : A \to \mathbb{R}$ on *maksimi* pisteessä $x_0 \in A$, jos $f(x) \leqq f(x_0)$ kaikilla $x \in A$.
b) Funktiolla $f : A \to \mathbb{R}$ on *minimi* pisteessä $x_0 \in A$, jos $f(x) \geqq f(x_0)$ kaikilla $x \in A$.
c) Funktiolla $f : A \to \mathbb{R}$ on *lokaali maksimi* pisteessä $x_0 \in A$, jos on olemassa $\alpha \in \mathbb{R}_+$ siten, että funktiolla $f_{|B(x_0,\alpha)}$ on maksimi pisteessä x_0.
d) Funktiolla $f : A \to \mathbb{R}$ on *lokaali minimi* pisteessä $x_0 \in A$, jos on olemassa $\alpha \in \mathbb{R}_+$ siten, että funktiolla $f_{|B(x_0,\alpha)}$ on minimi pisteessä x_0.

Seuraus 6.3.10. Funktiolla $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ voi olla maksimi/minimi pisteessä $x_0 \in [a,b]$ vain, jos jokin seuraavista pätee:
a) $x_0 = a$
b) $x_0 = b$
c) f ei ole derivoituva pisteessä x_0
d) $f'(x_0) = 0$.

Lause 6.3.11. Jos $f'(x_0) = 0$ ja $f''(x_0) > 0$, niin f:llä on lokaali minimi pisteessä x_0.

Lause 6.3.12. Funktiolla voi olla maksimi/minimi niissä pisteissä, joissa sillä on lokaali maksimi/minimi.

6.4. Yleistetty differentiaalilaskennan väliarvolause ja L'Hospitalin sääntö.

Lause 6.4.1 (Yleistetty differentiaalilaskennan väliarvolause, eli YDVAL)**.** Jos f ja g ovat jatkuvia välillä $[a,b]$, derivoituvia välillä $]a,b[$ ja $g'(x) > 0$ kaikilla $x \in]a,b[$, niin on olemassa $c \in]a,b[$ siten, että
$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Lause 6.4.2 (L'Hospital)**.** Jos $f(x_0) = g(x_0) = 0$, raja-arvo
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$
on olemassa, $\lim_{x\to x_0} f'(x) = a$ ja $\lim_{x\to x_0} g'(x) = b \neq 0$, niin
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}.$$

Huom. L'Hospitalin lause voidaan todistaa heikommillakin oletuksilla.

7. Integraalilaskenta

7.1. Riemannin integraali.

Määritelmä 7.1.1. Äärellinen joukko $D = \{x_k\}_{k=0}^n$ on välin $[a,b]$ *jako,* jos
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$
Jaon $D = \{x_k\}_{k=0}^n$ *normi* on
$$|D| := \max_{1\leqq k\leqq n} (x_k - x_{k-1}).$$
Jako D_2 on jaon D_1 *hienonnus,* jos $D_1 \subset D_2$.

Määritelmä 7.1.2. Jos $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on rajoitettu ja $D = \{x_k\}_{k=0}^n$ on välin $[a,b]$ jako, niin f:n *alasumma* välillä $[a,b]$ on
$$\sigma(f,D) := \sum_{k=1}^{n} g_k(f,D)(x_k - x_{k-1}),$$

missä $g_k(f,D) := \inf\{f(x) : x_{k-1} \leqq x \leqq x_k\}$. Vastaavasti f:n *yläsumma* on

$$\Sigma(f,D) := \sum_{k=1}^{n} G_k(f,D)(x_k - x_{k-1}),$$

missä $G_k(f,D) := \sup\{f(x) : x_{k-1} \leqq x \leqq x_k\}$.

Lemma 7.1.3. Jos $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on rajoitettu, D_1 on välin $[a,b]$ jako ja D_2 on D_1:n hienonnus, niin

$$\sigma(f,D_1) \leqq \sigma(f,D_2) \quad \text{ja} \quad \Sigma(f,D_2) \leqq \Sigma(f,D_1).$$

Lemma 7.1.4. Jos D_1 ja D_2 ovat välin $[a,b]$ jakoja ja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on rajoitettu, niin $\sigma(f,D_1) \leqq \Sigma(f,D_2)$. Toisin sanoen jokainen f:n alasumma on pienempi tai yhtä suuri kuin mikä tahansa f:n yläsumma.

Määritelmä 7.1.5. Jos $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on rajoitettu, niin f:n *alaintegraali* on

$$\sigma(f) := \sup\{\sigma(f,D) : D \text{ on välin } [a,b] \text{ jako }\}$$

ja f:n *yläintegraali* on

$$\Sigma(f) := \inf\{\Sigma(f,D) : D \text{ on välin } [a,b] \text{ jako }\}.$$

Huom. Lemman 7.1.3 nojalla määritelmän supremumit ja infimumit ovat olemassa, sillä jokaisella välin $[a,b]$ jaolla D on

$$\sigma(f,D) \leqq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} f(x) = \Sigma(f,\{a,b\})$$

ja

$$\Sigma(f,d) \geqq (b-a) \inf_{x\in[a,b]} f(x) = \sigma(f,\{a,b\}).$$

Määritelmä 7.1.6. Rajoitettu funktio $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on *Riemann-integroituva,* jos ja vain jos $\sigma(f) = \Sigma(f)$, jolloin sen *(Riemann-)integraali* on

$$\int_a^b f(x)\,dx := \Sigma(f).$$

Lause 7.1.7. Rajoitettu funktio $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on Riemann-integroituva, jos kaikilla $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ on olemassa välin $[a,b]$ jako D_ε siten, että

$$\Sigma(f,D_\varepsilon) - \sigma(f,D_\varepsilon) < \varepsilon.$$

7.2. **Peruslauseita.**

Lemma 7.2.1. Jos A ja B ovat ylhäältä rajoitettuja epätyhjiä reaalilukujoukkoja, niin

a) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$, missä $A+B := \{x+y : x \in A, y \in B\}$
b) $\sup cA = c\sup A$, kun $c \geqq 0$ ja $cA := \{cx : x \in A\}$.
c) $\sup cA = c\inf A$, kun $c \leqq 0$.

Lause 7.2.2. Jos $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ ja $\beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ ovat (rajoitettuja ja) integroituvia, niin $\alpha + \beta$ on integroituva ja

$$\int_a^b \alpha(x) + \beta(x)\,dx = \int_a^b \alpha\,dx + \int_a^b \beta\,dx.$$

Lause 7.2.3. Jos $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ on (rajoitettu ja) integroituva ja $c \in \mathbb{R}$, niin $c\alpha$ on integroituva ja

$$\int_a^b c\alpha(x)\,dx = c\int_a^b \alpha(x)\,dx.$$

Seuraus 7.2.4. Jos funktiot $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ ovat (rajoitettuja ja) integroituvia ja $c_k \in \mathbb{R}$, niin $\sum_{k=1}^n c_k f_k$ on integroituva ja

$$\int_a^b \sum_{k=1}^n c_k f_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^n c_k \int_a^b f_k(x)\,dx.$$

Lause 7.2.5. Jos $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on (rajoitettu ja) integroituva ja
$$m = \inf_{a \leqq x \leqq b} f(x), \quad \text{ja} \quad M = \sup_{a \leqq x \leqq b} f(x),$$
niin
$$m(b-a) \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq M(b-a).$$

Lause 7.2.6. Jos $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ja $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ovat (rajoitettuja ja) integroituvia siten, että $f(x) \leqq g(x)$ kaikilla $x \in [a,b]$, niin
$$\int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Huom Edeltävissä lauseissa on mainittu erikseen oletuksena, että funktion tulee olla rajoitettu. Tämä kuitenkin sisältyy oletukseen, että funktio on Riemann-integorituva, ja siksi sitä ei jatkossa enää erikseen mainita.

Määritelmä 7.2.7. Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ *positiiviosa* on funktio
$$f_+ : A \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} f(x), & \text{kun } f(x) \geqq 0 \\ 0 & \text{muulloin,} \end{cases}$$
ja *negatiiviosa* on funktio
$$f_- : A \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} -f(x), & \text{kun } f(x) \leqq 0 \\ 0 & \text{muulloin .} \end{cases}$$

Huom. $f+ \geqq 0$ ja $f_- \geqq 0$. Lisäksi $f = f_+ - f_-$ ja $|f| = f_+ + f_-$.

Lause 7.2.8. Jos $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on integroituva, niin $f_+ : [a,b] \to \mathbb{R}$ ja $f_- : [a,b] \to \mathbb{R}$ ovat integroituvia.

Lause 7.2.9. Jos $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on integroituva, niin myös $|f| : [a,b] \to \mathbb{R} : x \mapsto |f(x)|$ on integroituva ja
$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Lause 7.2.10. Jos $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ ja $\beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ ovat integroituvia, niin $\alpha\beta : [a,b] \to \mathbb{R} : x \mapsto \alpha(x)\beta(x)$ on integroituva.

Lause 7.2.11 (Integraalilaskennan väliarvolause, eli IVAL)**.** Jos $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on integroituva, $m = \inf_{a \leqq x \leqq b} f(x)$ ja $M = \sup_{a \leqq x \leqq b} f(x)$, niin
$$m \leqq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \leqq M.$$

Seuraus 7.2.12. Jos $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja integroituva, niin on olemassa $c \in [a,b]$ siten, että
$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Lause 7.2.13 (Yleistetty integraalilaskennan väliarvolause, eli YIVAL)**.** Jos $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ja $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ ovat integroituvia, $h \geqq 0$ ja $\int_a^b h(x)\,dx$, niin
$$m \leqq \frac{\int_a^b f(x)h(x)\,dx}{\int_a^b h(x)\,dx} \leqq M,$$
missä $m = \inf_{a \leqq x \leqq b} f(x)$ ja $M = \sup_{a \leqq x \leqq b} f(x)$.

Määritelmä 7.1.6 koskee vain funktioiden integraalia niiden koko määrittelyjoukossa. Funktiolle tietenkin voidaan määritellä integraali pienemmässäkin joukossa

Määritelmä 7.2.14. Funktio $f : A \to \mathbb{R}$ on *integroituva yli välin* $[a, b] \subset A$, jos $f_{|[a,b]}$ on integroituva määritelmän 7.1.6 mielessä. Tällöin f:n Riemann-integraali yli välin $[a, b]$ on

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^b f_{|[a,b]}(x)\,dx.$$

Esimerkiksi funktion $f\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$ Riemann-integraali yli välin $[1, 2] \subset \mathbb{R}_+$ on sama kuin rajoittuman $f_{|[1,2]} : [1, 2] \to \mathbb{R}$ integraali yli välin $[1, 2]$.

Lause 7.2.15. Jos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on rajoitettu ja $c \in \,]a, b[\,$, niin f on Riemann-integroituva yli välin [a,b] jos, ja vain jos f on integroituva yli välien $[a, c]$ ja $[c, b]$. Lisäksi tällöin

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Määritelmä 7.2.16. a) Jos $f : A \to \mathbb{R}$ on funktio ja $a \in A$, niin

$$\int_a^a f(x)\,dx := 0.$$

b) Jos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on Riemann-integroituva, niin

$$\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Lause 7.2.17. Jos $f : \Delta \to \mathbb{R}$ on integroituva, ja Δ on väli, joka sisältää pisteet a, b ja c, niin

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx,$$

olivatpa pisteet a, b ja c missä järjestyksessä hyvänsä.

7.3. Jatkuvien funktioiden integroituvuus.

Määritelmä 7.3.1. Funktio $f : A \to \mathbb{R}$ on *tasaisesti jatkuva,* jos

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}_+ : x, y \in A, |x - y| < \delta_\varepsilon \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Lause 7.3.2. Jos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva joukossa $[a, b]$, niin f on tasaisesti jatkuva joukossa $[a, b]$.

Lause 7.3.3. Jos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on rajoitettu ja jatkuva, niin se on Riemann-integroituva.

7.4. Lebesguen ehto. (Ei tarvitse osata).

Määritelmä 7.4.1. Joukko $A \subset \mathbb{R}$ on *nollamittainen,* jos kaikilla $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ on olemassa välit $]a_k, b_k[\,, k \in \mathbb{N}$ siten, että

$$A \subset \cup_{k=1}^{\infty} \,]a_k, b_k[\ \text{ ja } \ \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \varepsilon.$$

Lause 7.4.2 (Lebesguen ehto). Rajoitettu funktio $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on Riemann-integroituva jos, ja vain jos sen epäjatkuvuuspisteiden joukko on nollamittainen.

Lause 7.4.3. Seuraavat ovat riittäviä ehtoja rajoitetun funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integroituvuudelle:

a) f:n epäjatkuvuuspisteiden joukko on numeroituva
b) f on monotoninen
c) f on rajoitetusti heilahtelva, eli on olemassa $M \in \mathbb{R}$ siten, että kaikille välin $[a, b]$ jaoille $D = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ pätee

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leqq M.$$

Lebesguen ehdon todistus yms, katso Tom Apostol: "Mathematical Analysis".

7.5. **Primitiivi.**

Määritelmä 7.5.1. Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funktio. Jos on olemassa funktio $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ siten, että $F'(x) = f(x)$ kaikilla $x \in \,]a, b[\,$, $F'(a+) = f(a)$ ja $F'(b-) = f(b)$, niin F on funktion f *primitiivi* eli *antiderivaatta.*

Huom. Primitiivi voidaan määritellä samaan tapaan yleisemmin esimerkiksi avoimessa joukossa määritellylle funktiolle.

Huom. Primitiivi ei ole yksikäsitteinen: Jos F on f:n primitiivi, niin kaikilla $c \in \mathbb{R}$ myös $F + c$ on f:n primitiivi.

Lause 7.5.2. Jos F on funktion f primitiivi, niin $\{F + c : c \in \mathbb{R}\}$ on kaikkien f:n primitiivien joukko.

Lause 7.5.3. Jos F on funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ primitiivi ja G on funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ primitiivi, niin $F + G$ on $f + g$:n primitiivi, ja αF on αf:n primitiivi kaikilla $\alpha \in \mathbb{R}$.

7.6. **Riemann-integraali ja primitiivi.**

Lause 7.6.1. Jos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on Riemann-integroituva, niin funktio

$$F : [a, b] \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$$

on jatkuva.

Lause 7.6.2. Olkoot f ja F kuten edellisessä lauseessa ja f lisäksi jatkuva pisteessä $x_0 \in \,]a, b[\,$. Tällöin F on derivoituva pisteessä x_0 ja $F'(x_0) = f(x_0)$.

Lause 7.6.3. Jos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva, niin sillä on primitiivi

$$F : [a, b] \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt.$$

Lause 7.6.4 (Analyysin peruslause)**.** Jos $f[a, b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva, niin

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =: \Big/_a^b F(x),$$

missä F on jokin f:n primitiivi.

Huom. Analyysin peruslause kattaa vain jatkuvat funktiot. On olemassa myös epäjatkuvia integroituvia funktioita.

Huom. Määritelmä 7.1.6 on integraalin määritelmä, äskeinen lause kertoo vain, kuinka eräissä poikkeustapuksissa integraali voidaan laskea helpommin.

Huom. Äskeisen lauseen motivoimana primitiiviä sanotaan usein *määräämättömäksi integraaliksi* ja merkitään $\int f(x)\,dx = F(x)$.

7.7. **Osittaisintegrointi.**

Lause 7.7.1. Jos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on derivoituva ja f' integroituva, niin

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

Lause 7.7.2. Olkoot $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ ja $v : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivoituvia ja u' ja v' integroituvia. Tällöin

$$\int_a^b uv'\,dx = \Big/_a^b uv - \int_a^b u'v\,dx.$$

7.8. **Muuttujanvaihto.**

Lause 7.8.1. Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jatkuva ja $x : [\alpha, \beta] \to [a, b] : t \mapsto x(t)$ jatkuvasti derivoituva aidosti nouseva bijektio. Tällöin

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta x'(t)(f \circ x)(t)\,dt.$$

7.9. Epäoleelliset integraalit. I: Rajoittamaton väli

Määritelmä 7.9.1. a) Jos funktio $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ on Riemann-integroituva yli jokaisen välin $[a, b] \subset [a, \infty[$ ja raja-arvo $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx = L$ on olemassa, niin$f$:llä on *epäoleellinen integraali* L yli välin $[a, \infty[$, merkitään tällöin

$$\int_a^\infty f(x)\,dx := L,$$

ja sanotaan, että integraali $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *suppenee*

b) Samankaltaisin oletuksin määritellään epäoleellinen integraali

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

funktiolle $f :]-\infty, b]$

c) Jos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on integroituva yli jokaisen välin $[a, b] \subset \mathbb{R}$, ja jollakin $c \in \mathbb{R}$ raja-arvot

$$\lim_{a\to-\infty} \int_a^c f(x)\,dx \text{ ja } \lim_{b\to\infty} \int_c^b f(x)\,dx$$

ovat olemassa, niin f:llä on epäoleellinen integraali

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx := \lim_{a\to-\infty} \int_a^c f(x)\,dx + \lim_{b\to\infty} \int_c^b f(x)\,dx.$$

Huom. Kohdassa c epäoleellisen integraalin olemassaolo ja arvo eivät riipu pisteen $c \in \mathbb{R}$ valinnasta.

Huom. Jos esimerkiksi

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx = \infty,$$

niin merkitään $\int_a^\infty f(x)\,dx = \infty$. Tällöin kuitenkin epäoleellinen integraali *hajaantuu,* ei suppene.

Huom. Epäoleelliset integraalit palautuvat funktioiden raja-arvoihin.

Lause 7.9.2. Jos funktiolla $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ on $f(x) \geqq 0$ ja f on integroituva yli jokaisen välin $[a, b] \subset [a, \infty[$, niin seuraavat ovat yhtäpitäviä:

(1) $\int_a^\infty f(x)\,dx$ suppenee
(2) on olemassa $M \in \mathbb{R}$ siten, että kaikilla $b \geqq a$ on $\int_a^b f(x)\,dx \leqq M$,

Lause 7.9.3. Jos $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ ja $g : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ ovat funktioita siten $0 \leqq f(x) \leqq g(x)$ kaikilla $x \geqq a$ ja integraalit $\int_a^b f(x)\,dx$ ja $\int_a^b g(x)\,dx$ ovat olemassa kaikilla $b \geqq a$, niin

(1) $\int_a^\infty g(x)\,dx$ suppenee $\Longrightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx$ suppenee
(2) $\int_a^\infty f(x)\,dx$ hajaantuu $\Longrightarrow \int_a^\infty g(x)$ hajaantuu.

Lause 7.9.4 (Osamäärätesti)**.** Jos $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ ja $g\, [a, \infty[\to \mathbb{R}$ ovat integroituvia yli jokaisen välin $[a, b] \subset [a, \infty[$ ja kaikilla $x \geqq a$ on $f(x) \geqq 0$ ja $g(x) > 0$, niin

(1) Jos $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A > 0$, niin

$$\int_a^\infty g(x)\,dx \text{ suppenee } \Longleftrightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx \text{ suppenee}$$

(2) Jos $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, niin

$$\int_a^\infty g(x)\,dx \text{ suppenee } \Longrightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx \text{ suppenee}$$

(3) Jos $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$, niin

$$\int_a^\infty g(x)\,dx \text{ hajaantuu } \Longrightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx \text{ hajaantuu.}$$

Määritelmä 7.9.5. Integraali $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *suppenee itseisesti,* jos integraali $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ supppenee.

Huom. Tässä määritelmässä on ehto vähemmän kuin luennolla esitetyssä (ehto on nyt seuraavan lauseessa).

Lause 7.9.6. Jos $f : [a,\infty[\to \mathbb{R}$ on integroituva yli jokaisen välin $[a,b] \subset [a,\infty[$ ja integraali $\int_a^\infty f(x)\,dx$ suppenee itseisesti, niin se suppenee.

Lause 7.9.7. Jos $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ja $\int_a^\infty g(x)\,dx$ suppenevat, niin

a) $\int_a^\infty f(x) + g(x)\,dx$ suppenee
b) $\int_a^\infty cf(x)\,dx$ suppenee kaikilla $c \in \mathbb{R}$.

II: Rajoittamaton funktio

Määritelmä 7.9.8. (1) Jos $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ on integroituva yli jokaisen välin $[c,b] \subset]a,b]$ ja raja-arvo

$$\lim_{c\to a+} \int_c^b f(x)\,dx = L$$

on olemassa, niin L on f:n *epäoleellinen integraali* yli välin $]a,b]$, merkitään

$$L =: \int_a^b f(x)\,dx.$$

(2) Samankaltaisin oletuksin funktiolle $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ on

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{c\to b-} \int_a^c f(x)\,dx.$$

(3) Funktiolla $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ on *epäoleellinen integraali,* jos on olemassa $\alpha \in]a,b[$ siten, että f on integroituva yli jokaisen välin $[\beta,\alpha] \subset]a,\alpha]$ ja $[\alpha,\gamma] \subset [\alpha,b[$ ja raja-arvot $\lim_{\beta\to a+} \int_\beta^\alpha f(x)\,dx$ ja $\lim_{\gamma\to b-} \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx$ ovat olemassa,. Tällöin

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\beta\to a+} \int_\beta^\alpha f(x)\,dx + \lim_{\gamma\to b-} \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx.$$

Huom. Määritelmän kohdassa 3 epäoleellisen integraalin olemassaolo ja arvo eivät riipu pisteen $\alpha \in]a,b[$ valinnasta.

Huom. Aiempien lauseiden kanssa analogiset tulokset pätevät myös määritelmän 7.9.8 epäoleellisille integraaleille.

8. Reaalilukusarjat

8.1. Sarja ja sen summa.

Määritelmä 8.1.1. a) Olkoon $(x_k)_{k=1}^\infty$ reaalilukujono. Sen *n:s osasumma* on $\sum_{k=1}^n x_k$.

b) Osasummien jono

$$(S_n)_{n=1}^\infty = \left(\sum_{k=1}^n x_k\right)_{n=1}^\infty$$

on lukujonon $(x_k)_{k=1}^\infty$ määrittelemä *sarja,* merkitään sitä $\sum_{k=1}^\infty x_k$.

c) Lukujonon $(x_k)_{k=1}^\infty$ määrittelemä sarja *suppenee* (eli *konvergoi*), jos osasummien jonolla $(S_n)_{n=1}^\infty$ on raja-arvo $S \in \mathbb{R}$, tällöin raja-arvoa S sanotaan sarjan $\sum_{k=1}^\infty x_k$ *summaksi*

d) Jos sarja ei suppene, se *hajaantuu* (eli *divergoi*)

e) Suppenevan sarjan n:s *jäännöstermi* on $R_n := S - S_n = \sum_{k=n+1}^\infty x_k$.

Huom. Merkinnällä $\sum_{k=1}^\infty x_k$ tarkoitetaan joskus sarjaa ja joskus sen summaa. Yleensä merkitys selviää asiayhteydestä.

Huom. Älä koskaan käytä laskuissa sarjan summaa, ellet tiedä että se suppenee.

Huom. Sarjat palautuvat määritelmänsä vuoksi lukujonojen raja-arvoihin.

Huom. Sarjat ovat analogisia epäoleellisten integraalien kanssa: Sarja $\sum_{k=1}^\infty a_k$ suppenee jos, ja vain jos epäoleellinen integraali $\int_1^\infty f(x)\,dx$ suppenee, missä $f(x) := a_k$, kun $k \leqq x \leqq k+1$.

Toisaalta epäoleellinen integraali $\int_1^\infty g(x)\,dx$ suppenee jos, ja vain jos sarja $\sum_{k=1}^\infty \int_k^{k+1} g(x)\,dx$ suppenee.

Lause 8.1.2. Jos sarjat $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ suppenevat, ja niiden summat ovat S_x ja S_y, niin

a) sarja $\sum_{k=1}^{\infty}(x_k + y_k)$ suppenee, ja sen summa on $S_x + S_y$
b) kaikilla $c \in \mathbb{R}$ sarja $\sum_{k=1}^{\infty} cx_k$ suppenee, ja sen summa on cS_x.

Seuraus 8.1.3. Jos sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee ja $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ hajaantuu, niin sarja $\sum_{k=1}^{\infty}(x_k + y_k)$ hajaantuu.

Lemma 8.1.4. Kun $q \neq 1$, geometrisen sarjan $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ $n+1$:s osasumma on on

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Lause 8.1.5. Geometrinen sarja $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ suppenee jos, ja vain jos $|q| < 1$, jolloin sen summa on $\frac{1}{1-q}$.

Huom. Geometrisen sarjan indeksit alkavat 0:sta. Myös sarjoja $\sum_{k=0}^{\infty} aq^k$, missä $c \in \mathbb{R}$ on vakio, sanotaan geometrisiksi. Niiden summan laskemiseen sovelletaan lausetta 8.1.2.

Huom. Määritellään $0^0 := 1$.

Lause 8.1.6 (Cauchyn kriteeri)**.** Sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee jos, aj vain jos kaikilla $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ on olemassa $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ siten, että

$$n > n(\varepsilon), p \in \mathbb{N} \Longrightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k \right| < \varepsilon.$$

Esim. *Harmoninen sarja* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ hajaantuu.

Lause 8.1.7. Jos sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee, niin $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$ ja $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$.

Huom. $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$ *ei takaa* sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenemista (esimerkiksi harmoninen sarja hajaantuu, vaikka $\lim_{k\to\infty} 1/k = 0$.

Seuraus 8.1.8. Jos $\lim_{k\to\infty} x_k \neq 0$ tai $\nexists \lim_{k\to\infty} x_k$, niin sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ ei suppene.

Lause 8.1.9. Olkoon $p \in \mathbb{N}$. Sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee jos, ja vain jos sarja $\sum_{k=p}^{\infty} x_k$ suppenee. Tällöin

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \sum_{k=1}^{p-1} x_k + \sum_{k=p}^{\infty} x_k.$$

Lause 8.1.10. Olkoon $\sum_{l=1}^{\infty} x_l$ suppeneva sarja, $(k_m)_{m=1}^{\infty}$ aidosti nouseva jono luonnollisia lukuja $(k_1 < k_2 < k_3 < \cdots < k_m < k_{m+1} < \cdots)$, ja

$$\begin{aligned}
y_1 &:= x_1 + x_2 + \cdots x_{k_1} &&= \sum_{l=1}^{k_1} x_l \\
y_2 &:= x_{k_1+1} + x_{k_1+2} + \cdots + x_{k_2} &&= \sum_{l=k_1+1}^{k_2} x_l \\
&\vdots \\
y_m &:= x_{k_{m-1}+1} + x_{k_{m-1}+2} + \cdots + x_{k_m} &&= \sum_{l=k_{m-1}+1}^{k_m} x_l \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Tällöin myös sarja $\sum_{m=1}^{\infty} y_m$ suppenee, ja sen summa on $\sum_{m=1}^{\infty} y_m = \sum_{l=1}^{\infty} x_l$.

Huom. Toiseen suuntaan ei voida päätellä: uudelleen ryhmitellyn sarjan suppenemisesta ei (ilman lisäehtoja) seuraa alkuperäisen sarjan suppeneminen.

Lause 8.1.11. Jos sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_{2k-1}+x_{2k}$ suppenee ja $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$, niin sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee.

8.2. Positiivitermiset sarjat.

Määritelmä 8.2.1. Sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ on *positiiviterminen,* jos $x_k \geqq 0$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$.

Lause 8.2.2. Positiiviterminen sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee jos, ja vain jos on olemassa $M \in \mathbb{R}$ siten, että $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \leqq M$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Lause 8.2.3 (Majoranttiperiaate)**.** Jos $0 \leqq x_k \leqq y_k$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja sarja $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ suppenee, niin myös sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee.

Seuraus 8.2.4 (Minoranttiperiaate)**.** Jos $0 \leqq x_k \leqq y_k$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ hajaantuu, niin myös sarja $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ hajaantuu.

Suppenemistestejä:

Lause 8.2.5. Jos $x_k \geqq 0$ ja $y_k > 0$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja

a) $\lim_{k\to\infty} \frac{x_k}{y_k} = a > 0$, niin $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ suppenee $\Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee
b) $\lim_{k\to\infty} \frac{x_k}{y_k} = 0$, niin $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ suppenee $\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee
c) $\lim_{k\to\infty} \frac{x_k}{y_k} = \infty$, niin $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ hajaantuu $\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ hajaantuu.

Lause 8.2.6 (Cauchyn juuritesti)**.** Jos $x_k \geqq 0$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja on olemassa $a < 1$ ja k_0 siten, että $k > k_0 \Longrightarrow \sqrt[k]{x_k} < a$, niin sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee.

Lause 8.2.7 (Cauchyn suhde- eli osamäärätesti)**.** Jos $x_k > 0$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja on olemassa $a < 1$ ja $k_0 \in \mathbb{N}$ siten, että $k > k_0 \Longrightarrow \frac{x_{k+1}}{x_k} < a$, niin sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee.

Seuraus 8.2.8. a) Jos $x_k \geqq 0$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja $\exists \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{x_k} =: a < 1$, niin sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee
b) Jos $x_k > 0$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja $\exists \lim_{k\to\infty} \frac{x_{k+1}}{x_k} =: b < 1$, niin sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee.

Lause 8.2.9 (Integraalitesti)**.** Jos $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ on vähenevä, ei-negatiivinen ja integroituva jokaisella välillä $[1, a], a \geqq 1$, niin

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx \text{ suppenee } \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \text{ suppenee.}$$

Positiivitermisiä sarjoja koskevia lauseita:

Lause 8.2.10. Jos $x_k \geqq 0$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee ja $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ on bijektio, niin myös sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\alpha(k)}$ suppenee ja sen summa on

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_{\alpha(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k.$$

Lause 8.2.11 (Cauchyn tulo)**.** Jos positiivitermiset sarjat $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ suppenevat, niin myös sarja

$$x_1y_1 + (x_1y_2 + x_2y_1) + (x_1y_3 + x_2y_2 + x_3y_1) + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{k} x_l y_{k+1-l} \right)$$

suppenee ja sen summa on

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{k} x_l y_{k+1-l} \right) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} y_k \right).$$

Lause 8.2.12. Jos $x_k \geqq 0$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, $(k_m)_{m=1}^{\infty}$ on aidosti nouseva jono luonnollisia lukuja (vrt lause 8.1.10) ja

$$\begin{aligned} y_1 &:= x_1 + x_2 + \cdots + x_{k_1} \\ y_2 &:= x_{k_1+1} + x_{k_1+2} + \cdots + x_{k_2} \\ \vdots\, y_m &:= \sum_{l=k_{m-1}+1}^{k_m} x_l, \end{aligned}$$

niin

$$\sum_{m=1}^{\infty} y_m \text{ suppenee } \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x_k \text{ suppenee.}$$

8.3. **Itseisesti suppenevat sarjat.**

Määritelmä 8.3.1. Sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *suppenee itseisesti,* jos sarja $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$ suppenee.

Määritelmä 8.3.2. Merkitään jonolle $(x_k)_{k=1}^{\infty}$

$$x_k^+ := \begin{cases} x_k, & \text{jos } x_k \geqq 0 \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases}$$

ja

$$x_k^- := \begin{cases} -x_k, & \text{jos } x_k \leqq 0 \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Huom. $x_k = x_k^+ - x_k^-$, $\quad 0 \leqq x_k^+ \leqq |x_k|$, $\quad |x_k| = x_k^+ x_k^-$ $\quad$ ja $\quad 0 \leqq x_k^- \leqq |x_k|$.

Lause 8.3.3. Sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee itseisesti $\Longleftrightarrow$ sarjat $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^+$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^-$ suppenevat.

Lause 8.3.4. Itseisesti suppeneva sarja suppenee.

Seuraus 8.3.5. Jos sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee, mutta ei itseisesti, niin sarjat $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^+$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^-$ hajaantuvat.

Lause 8.3.6. Jos sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee itseisesti ja $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ on bijektio, niin sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\alpha(k)}$ suppenee itseisesti (ja siis suppenee myös sellaisenaan). Lisäksi

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_{\alpha(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k.$$

Lause 8.3.7. Jos sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee, mutta ei itseisesti, niin kaikille $c \in \mathbb{R}$ sarjan termit voidaan järjestää uudelleen (eli on olemassa bijektio $\alpha_c : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jne) siten, että uuden sarjan summaksi tulee c. Sarja voidaan myös järjestää uudelleen siten, että uusi sarja hajaantuu.

Lause 8.3.8 (Leibnitz[1])**.** Jos (x_k) on aidosti vähenevä jono positiivisia reaalilukuja siten, että $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$, niin sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} x_k$$

suppenee, sen n:s jäännöstermi R_n on samanmerkkinen kuin $(-1)^n$ ja $|R_n| \leqq x_{n+1}$.

9. Funktiojonot ja -sarjat

9.1. **Pisteittäinen ja tasainen suppeneminen.**

Määritelmä 9.1.1. Olkoot $f_k : A \to \mathbb{R}$ funktioita. Funktio $f : A \to \mathbb{R}$ on jonon $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ *pisteittäinen raja-arvo,* jos kaikilla $x \in A$ on $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$.

Huom. Pisteittäinen raja-arvo palautuu lukujonojen raja-arvoon, sillä kun $x \in A$ on valittu, on $(f_k(x))_{k=1}^{\infty}$ reaalilukujono.

Määritelmä 9.1.2. Funktiojono $(f_k)_{k=1}^{\infty}$, $f_k : A \to \mathbb{R}$ *suppenee tasaisesti* kohti funktiota $f : A \to \mathbb{R}$, jos

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists k(\varepsilon) \in \mathbb{N}\, \forall x \in A : k > k(\varepsilon) \Longrightarrow |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

[1] Nimen voi kirjoittaa sekä Leibniz että Leibnitz, L itse kuulemma käytti edellistä muotoa, mutta muut jälkimmäistä, joka oli vakiintunut 1900-luvulle asti.

Huom. Luennolla esitettiin määritelmä puhekielisemmässä muodossa:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists k(\varepsilon) \in \mathbb{N} : k > k(\varepsilon) \Longrightarrow |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \, \forall x \in A.$$

Ajatus on kuitenkin sama: pisteittäisessä suppenemisessa kullekin x:lle ja $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ voidaan valita $k(\varepsilon)$ siten, että $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$, tasaisessa suppenemisessa on kullekin $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ olemassa $k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ siten, että $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ jokaisella $x \in A$.

Lause 9.1.3. Jos funktiojono (f_k) suppenee tasaisesti kohti funktiota f, se suppenee myös pisteittäin kohti funktiota f.

Lause 9.1.4. Funktiojono $(f_k)_{k=1}^{\infty}$, $f_k : A \to \mathbb{R}$, suppenee tasaisesti kohti funktiota $f : A \to \mathbb{R}$ jos, ja vain jos

$$\lim_{k\to\infty} \left(\sup_{x \in A} |f_k(x) - f(x)| \right) = 0.$$

Lause 9.1.5 (Cauchyn ehto tasaiselle suppenemiselle)**.** Funktiot $f_k : A \to \mathbb{R}$ suppenevat tasaisesti kohti jotain funktiota jos, ja vain jos

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists k(\varepsilon) \in \mathbb{N} : k, m > k(\varepsilon) \Longrightarrow |f_m(x) - f_k(x)| < \varepsilon \, \forall x \in A.$$

Lause 9.1.6. Jos $I \subset \mathbb{R}$ on väli, funktiot $f_k : I \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvia ja suppenevat tasaisesti kohti funktiota $f : I \to \mathbb{R}$, niin f on jatkuva.

Lause 9.1.7. Jos funktiot $f_k : A \to \mathbb{R}$ ovat integroituvia yli välin $[a, b] \subset A$ ja suppenevat tasaisesti kohti funktiota $f : A \to \mathbb{R}$, niin f on integroituva yli välin $[a, b]$ ja

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k(x)\, dx.$$

Huom. Integroituvuus tässä tarkoittaa tavallista integraalia (määritelmän 7.1.6 mukaista), ei epäoleellista integraalia. Oletuksiin siis sisältyy, että funktiot f_k ovat rajoitettuja.

Seuraus 9.1.8. Edellisen lauseen oletuksin, kun $x_0 \in [a, b]$, funktiot

$$F_k : [a, b] \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_{x_0}^x f_k(t)\, dt$$

suppenevat tasaisesti kohti funktiota

$$F : [a, b] \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_{x_0}^x f(t)\, dt.$$

Huom. Seurauksen funktiot F_k *eivät* välttämättä ole funktioiden f_k primitiivejä (sillä kaikilla integroituvilla funktioilla ei sellaisia ole olemassa).

Lause 9.1.9. Olkoot funktiot $f_k : [a, b] \to \mathbb{R}$ jatkuvasti derivoituvia siten, että derivaatat $f_k' : [a, b] \to \mathbb{R}$ suppenevat tasaisesti kohti funktiota $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ja jollakin $x_0 \in [a, b]$ jono $(f_k(x_0))_{k=1}^{\infty}$ suppenee. Tällöin funktiot f_k suppenevat tasaisesti, ja niiden rajafunktiolle $f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ on

$$f'(x) = \lim_{k\to\infty} f_k'(x) = g(x).$$

9.2. **Funktiosarjat.**

Määritelmä 9.2.1. Funktioiden $f_k : A \to \mathbb{R}$ osasummien $S_n(x) := \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ jonoa sanotaan *funktiosarjaksi,* ja merkitään $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$.

Funktiosarja $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *suppenee pisteittäin,* jos osasummien jono $(S_n(x))_{n=1}^{\infty}$ suppenee pisteittäin. Jos osasummien jono suppenee tasaisesti, niin funktiosarja *suppenee tasaisesti.*

Huom. Merkinnällä $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ tarkoitetaan joskus sarjaa (riippumatta siitä suppeneeko se vai ei), ja joskus suppenevan sarjan summaa.

Huom Funktiosarjan suppeneminen palautuu funktiojonon suppenemiseen.

Lause 9.2.2. Joukossa A pisteittäin suppeneva funktiosarja $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ suppenee tasaisesti jos, ja vain jos *jäännöstermifunktiolle*

$$R_n(x) := \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$$

on $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |R_n(x)| = 0$.

Huom. Äskeisessä lauseessa tapaus $\{|R_n(x)| : x \in A\}$ ylhäältä rajoittamaton äärettömän monella $n \in \mathbb{N}$ tulkitaan siten, että $\sup_{x\in A} |R_n(x)| \not\to 0$.

Huom. Jos et tiedä, että sarja suppenee pisteittäin, älä käytä äskeistä lausetta. Jäännöstermi nimittäin on määritelty vain suppeneville sarjoille.

Lause 9.2.3 (Weierstrassin "M-testi"). Jos funktioille $f_k : A \to \mathbb{R}$ on olemassa $M_k \in \mathbb{R}$ siten, että $|f_k(x)| \leqq M_k$ kaikilla $x \in A$ ja $k \in \mathbb{N}$ ja sarja $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ suppenee, niin sarja $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ suppenee tasaisesti.

Lause 9.2.4. Jos funktiot $f_k[a, b] \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvia kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja sarja $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ suppenee tasaisesti, niin sen *summafunktio*

$$S : [a, b] \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

on jatkuva.

Lause 9.2.5. Jos funktiot $f_k : [a, b] \to \mathbb{R}$ ovat integroituvia ja sarja $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ suppenee tasaisesti, niin summafunktio $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ on integroituva ja

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\, dx.$$

Huom. Kuten funktiojonoille, on myös sarjoille edellisen lauseen oletuksin voimassa, että kun $x_0 \in [a, b]$, funktiot

$$F_n : [a, b] \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \int_{x_0}^{x} f_k(t)\, dt$$

suppenevat tasaisesti kohti funktiota

$$F : [a, b] \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_{x_0}^{x} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\, dt.$$

Lause 9.2.6. Jos funktiot $f_k[a, b] \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvasti derivoituvia, sarja $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$ suppenee tasaisesti ja jollakin $x_0 \in [a, b]$ sarja $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_0)$ suppenee, niin sarja $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ suppenee tasaisesti, on derivoituva ja

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x).$$

9.3. **Potenssisarjat.**

Määritelmä 9.3.1. Jos $x_0 \in \mathbb{R}$ ja $a_k \in \mathbb{R}$ kaikilla $k = 0, 1, 2, \ldots$, niin muotoa

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

olevaa sarjaa sanotaan *potenssisarjaksi.*

Lause 9.3.2 (Abel). Jos potenssisarja $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ suppenee pisteessä $x_1 \neq x_0$, niin se suppenee kaikilla $x \in \mathbb{R}$, joilla on $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$.

Huom. Jokainen potenssisarja suppenee pisteessä x_0.

Lause 9.3.3. Jos on olemassa $M \in \mathbb{R}$ siten, että $|a_k(x_1 - x_0)^k| \leqq M$ kaikilla $k = 0, 1, 2, \ldots$, niin sarja $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ suppenee kaikilla $x \in \mathbb{R}$, joilla on $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$.

Seuraus 9.3.4. Jos sarja $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x_1 - x_0)^k$ hajaantuu, niin sarja $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ hajaantuu kaikilla $x \in \mathbb{R}$, joilla on $|x - x_0| > |x_1 - x_0|$.

Määritelmä 9.3.5. Olkoon $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ potenssisarja ja

$$E := \{|x - x_0| : \text{ sarja } \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k \text{ suppenee pisteessä } x\}.$$

Potenssisarjan $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ *suppenemissäde* on

$$R := \begin{cases} \infty & \text{kun } E \text{ on ylhäältä rajoittamaton} \\ \sup E & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Lause 9.3.6. Jos R on potenssisarjan $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ suppenemissäde, niin sarja suppenee, kun $|x - x_0| < R$ ja hajaantuu, kun $|x - x_o| > R$.

Huom. Potenssisarjan suppeneminen kun $|x - x_0| = R$ on aina selvitettävä erikseen. Esimerkiksi sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ ei suppene pisteissä ± 1, sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$ suppenee pisteissä ± 1 ja sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ hajaantuu pisteessä 1 ja suppenee pisteessä -1. Jokaiselle näistä sarjoista on $R = 1$.

Lause 9.3.7. Olkoon $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ potenssisarja ja R sen suppenemissäde.

a) Jos $\exists M \in \mathbb{R} : |a_k| \leqq M$ kaikilla $k = 0, 1, 2, \dots$, niin $R \geqq 1$
b) Jos $\exists m \in \mathbb{R}_+ : m \leqq |a_k|$ kaikilla $k = 0, 1, 2, \dots$, niin $R \leqq 1$
c) Jos $\exists m, M \in \mathbb{R}_+ : m \leqq |a_k| \leqq M$ kaikilla $k = 0, 1, 2, \dots$, niin $R = 1$.

Lause 9.3.8. Potenssisarjan $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ suppenemissäde on

$$R = \begin{cases} 0 & \text{jos } \{\sqrt[k]{|a_k|} : k \geqq n\} \text{ on ylhäältä rajoittamaton } \forall n \in \mathbb{N} \\ \infty & \text{jos } \lim_{n\to\infty} \sup_{k \geqq n} \sqrt[k]{|a_k|} = 0 \\ 1/a & \text{jos } \lim_{n\to\infty} \sup_{k \geqq n} \sqrt[k]{|a_k|} = a \in \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

Huom. Jos tulkitaan, että ylhäältä rajoittamatoman joukon supremum on ∞, $\lim_{n\to\infty} \infty = \infty$, $1/0 = \infty$ ja $1/\infty = 0$, lauseen kaava R:lle saa yksinkertaisemman muodon:

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sup_{k \geqq n} \sqrt[k]{|a_k|}}.$$

Huom2. Parempi kuitenkin olla tulkitsematta niin. Ajattele edellisen huomautksen kaavaa enemmänkin muistisääntönä.

Lemma 9.3.9. a) Jos reaalilukusarjalle $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ on $\lim_{n\to\infty} \sup_{k \geqq n} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$, niin se suppenee.
b) Jos reaalilukusarjalle $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ on $\lim_{n\to\infty} \sup_{k \geqq n} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$, niin se hajaantuu.

Lause 9.3.10. a) Jos raja-arvo $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ on olemassa tai $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \infty$, niin potenssisarjan $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ suppenemissäde on

$$R = \begin{cases} 0 & \text{jos } \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \infty \\ \infty & \text{jos } \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 0 \\ 1/a & \text{jos } \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = a. \end{cases}$$

b)

Jos raja-arvo $\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$ on olemassa tai $\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \infty$, niin potenssisarjan $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ suppenemissäde on

$$R = \begin{cases} 0 & \text{jos } \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \infty \\ \infty & \text{jos } \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = 0 \\ 1/b & \text{jos } \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = b. \end{cases}$$

Lause 9.3.11. a) Jos $R \in \mathbb{R}_+$ on potenssisarjan $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ suppenemissäde ja $\alpha \in]0, R[$, niin sarja $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ suppenee tasaisesti joukossa $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.

b) Jos potenssisarjan suppenemissäde on ∞, niin se suppenee tasaisesti joukossa $[-M, M]$ kaikilla $M \in \mathbb{R}_+$.

Seuraus 9.3.12. a) Jos $R \in \mathbb{R}_+$ on potenssisarjan $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ suppenemissäde ja $\alpha \in]0, R[$, niin summafunktio $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ on jatkuva joukossa $[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$.
b) Jos potenssisarjan suppenemissäde on ∞, niin sen summafunktio on jatkuva koko $\mathbb{R}$:ssä.

Lause 9.3.13. a) Jos $R \in \mathbb{R}_+$ on potenssisarjan $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_o)^k$ suppenemissäde ja $0 < \alpha < R$, niin potenssisarjan summafunktio on integroituva välillä $[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$ ja

$$\int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} a_k(x-x_0)^k \, dx.$$

b) Jos potenssisarjan $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ suppenemissäde on ∞, niin sen summafunktio on integroituva yli jokaisen välin $[-M, M] \subset \mathbb{R}$ ja

$$\int_{-M}^{M} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{-M}^{M} a_k(x-x_0)^k \, dx.$$

Lause 9.3.14. Potenssisarjalla $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ on sama suppenemissäde kuin sarjalla $\sum_{k=0}^{\infty} ka_k(x-x_0)^{k-1}$.

Lause 9.3.15. a) Jos $R \in \mathbb{R}_+$ on potenssisarjan suppenemissäde, niin sarjan summafunktio on derivoituva välillä $]x_0-R, x_0+R[$ ja

$$(*) \qquad D\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} ka_k(x-x_0)^{k-1}.$$

b) Jos potenssisarjan suppenemissäde on ∞, niin sen summafunktio on derivoituva koko $\mathbb{R}$:ssä ja derivaatta selviää kaavasta (*).

9.4. **Funktioita.**

Määritelmä 9.4.1. $\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Lause 9.4.2. $\exp'(x) = \exp(x) \, \forall x \in \mathbb{R}$.

Lause 9.4.3. Funktio exp on funktion exp primitiivi.

Lause 9.4.4. Funktio exp on aidosti nouseva bijektio $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$.

Määritelmä 9.4.5. Funktion exp: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ käänteisfunktio on *logaritmi* log: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.

Lause 9.4.6. a) $\log'(x) = 1/x$
b) Logaritmifunktion primitiivi on $x \log(x) - x$.

Määritelmä 9.4.7.

$$\sin(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$
$$\cos(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Lause 9.4.8. a) Sinin ja kosinin määrittelevät sarjat suppenevat tasaisesti välillä $[-M, M]$ kaikilla $M \in \mathbb{R}_+$.
b) $\sin'(x) = \cos(x) \, \forall x \in \mathbb{R}$
c) $\cos'(x) = -\sin(x) \, \forall x \in \mathbb{R}$.

Tarkemmin funktioista (sinin ja kosinin summakaavat yms kivaa): katso Merikosken moniste, johon on linkki esim AT:n kotisivuilta.

Tarkemmin melkeinpä mistä tahansa alkeisanalyysiin liittyvästä asiasta löytyy Tom Apostolin teoksesta Mathematical Analysis.